Глава 2. Решение систем линейных уравнений

§6 Формулы Крамера

1. Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \text{главный определитель системы}$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} - \text{вспомогательный определитель для } x_1$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} - \text{вспомогательный определитель для } x_2$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad \Delta \neq 0$$

Тогда:

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} \quad ; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}}$$ - **формулы Крамера**.

Пример:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 10$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 2$$

$$\textit{Ответ}: (1; 2)$$

Замечание:

1) $\Delta \neq 0$ – система имеет единственное решение $(x_1; x_2)$

2) $\Delta = 0;\ \ \Delta_{x_i} \neq 0;\ \ i = 1,2$ – система не имеет решения

3) $\Delta = \Delta_{x_i} = 0$ – система имеет бесконечное множество решений

2. Аналогично решается система 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными.

§7 Метод Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

В основе метода Гаусса лежит последовательное исключение неизвестных. С помощью элементарных преобразований, система уравнений приводится к ей равносильной ступенчатого или треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних переменных, находят все остальные.

При решении методом Гаусса можно:

- **переставлять местами два любых уравнения системы;**
- **умножать обе части уравнения на произвольное, отличное от нуля число;**
- **прибавлять к обеим частям одного уравнения соответствующие части другого, умноженного на какое-то постоянное число.**

Система обычно решается с помощью преобразований расширенной матрицы (матрицы коэффициентов при неизвестных и свободных членов).

Если в результате преобразования матрицы:

1) **система приводится к треугольному виду, то она имеет единственное решение**

2) **система приводится к трапецоидальному виду, то она имеет бесконечное множество решений.**

3) **В результате элементарных преобразований появится уравнение вида:**

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b$$

система *решений не имеет.*

Пример 1: **Методом Гаусса решить систему уравнений**

$$\begin{cases} x_1 - \quad x_2 + \ 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + \ 3x_2 + 3x_3 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (-1) & (-5) \\ \searrow & \searrow \\ & \searrow \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 18 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} \\ (-2) \\ \searrow \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 17 \end{array}\right)$$

Запишем полученную систему треугольного вида

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 & \quad x_1 - 4 + 2 = 1 & & \quad \underline{x_1 = 3} \\ \quad 2x_2 - 8x_3 = 0 & \quad 2x_2 - 8 \cdot 1 = 0 & \quad 2x_2 = 8 & \quad \underline{x_2 = 4} \\ \qquad 17x_3 = 17 & & & \quad \underline{x_3 = 1} \end{cases}$$

$\text{Ответ}: (3,\ 4, 1)$

Пример 2. Пусть система приводится к виду трапеции:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \quad x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \sim \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - x_3 \\ \quad x_2 = 3 - 2x_3 \end{cases} \sim \text{обозначим}$$

$$x_3 = C \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - C \\ \quad x_2 = 3 - 2C \end{cases}$$

Имеем: $x_2 = 3 - 2C$; $\begin{matrix} x_1 + (3 - 2c) = 1 - C; \\ x_1 = -2 + C \end{matrix}$

Итак: $\begin{cases} x_1 = -2 + C \\ x_2 = 3 - 2C \\ x_3 = C \end{cases}$ (-2+C; 3-2C; C)-общее решение

При $C = 0; \pm 1; \pm 2; ...$ находим бесконечное множество конкретных решений.

§8 Матричный метод решения систем линейных уравнений

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} ;\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Тогда первую часть этой системы можно будет представить в виде произведения двух матриц, а всю систему можно записать в виде матричного уравнения: $A \cdot X = B$.

Чтобы решить это матричное уравнение, нужно обе части слева умножить на A^{-1}**:**

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Замечание: **Матричным методом можно решать систему уравнений, если матрица *A* невырожденная.**

Пример: **Решить матричным способом систему уравнений**

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 24 \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33 \\ 24 \\ -8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 33 + (-1) \cdot 24 + 1 \cdot (-8) \\ (-38) \cdot 33 + 41 \cdot 24 - 34 \cdot (-8) \\ 27 \cdot 33 - 29 \cdot 24 + 24 \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ответ: (1; 2; 3)